MATRICES

1. माना $A = [a_{ij}]$ तथा $B = [b_{ij}]$, 3×3 के दो वास्तविक आव्यूह इस प्रकार हैं कि $b_{ij} = (3)^{(i+j-2)}a_{ji}$, जहाँ $i, j = 1, 2, 3$. यदि B का सारणिक 81 है, तो A का सारणिक है :

(1) 3 (2) 1/3
(3) 1/81 (4) 1/9

2. यदि समीकरण $x^2 + x + 1 = 0$ का एक मूल α है तथा आव्यूह

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 \end{bmatrix}$$ है, तो आव्यूह A^{31} बराबर है:

(1) A^3 (2) A
(3) A^2 (4) I_3

3. यदि $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$ तथा $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, हैं, तो $10A^{-1}$ बराबर हैं :

(1) 4I – A (2) A – 6I
(3) 6I – A (4) A – 4I

4. ऐसे सभी 3×3 आव्यूहों A की संख्या, जिसके अवयव समुच्चय $\{-1,0,1\}$ से हैं तथा AA^T के विकर्ण के अवयवों का योगफल 3 है, है ___________ ।

5. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, B = adjA तथा C = 3A हैं, तो $\frac{|\text{adj}B|}{|C|}$ का मान है :

(1) 72 (2) 2
(3) 8 (4) 16

6. माना A एक 2×2 का वास्तविक आव्यूह है जिसके अवयव {0, 1} में से हैं तथा $|A| \neq 0$ है। निम्न दो कथनों पर विचार कीजिए :

(P) यदि $A \neq I_2$, तो $|A| = -1$ है

(Q) यदि $|A| = 1$, तो $tr(A) = 2$ है

जहाँ I_2 एक 2×2 के तत्समक आव्यूह (identity matrix) को दर्शाता है तथा tr(A), आव्यूह A के विकर्ण के अवयवों के योगफल को दर्शाता है। तो :

(1) (P) सत्य है तथा (Q) असत्य है।
(2) (P) तथा (Q) दोनों असत्य है।
(3) (P) तथा (Q) दोनों सत्य है।
(4) (P) असत्य है तथा (Q) सत्य है।

7. माना $a, b, c \in R$ तथा सभी अशून्य है और $a^3 + b^3 + c^3 = 2$ को संतुष्ट करते है। यदि आव्यूह $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ के लिए $A^TA = I$ है, तो abc का एक मान हो सकता है?

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $-\frac{1}{3}$

(3) 3 (4) $\frac{1}{3}$

8. यदि $A = \{X = (x, y, z)^T : PX = 0$ तथा $x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ जबकि $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & 9 & -1 \end{bmatrix}$ है, तो A :

(1) एक ही अवयव वाला समुच्चय है।
(2) में मात्र दो अवयव है।
(3) में दो से अधिक अवयव है।
(4) एक रिक्त समुच्चय है।

9. माना $A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $x \in R$ तथा $A^4 = [a_{ij}]$ है। यदि $a_{11} = 109$ है, तो a_{22} बराबर है ________ ।

10. माना A एक 3×3 आव्यूह है, जिसके लिए adj $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ तथा B = adj (adj A) हैं। यदि $|A| = \lambda$ तथा $|(B^{-1})^T| = \mu$ है, तो क्रमित युग्म, $(|\lambda|, \mu)$ बराबर है :

(1) $\left(9, \frac{1}{9}\right)$ (2) $\left(9, \frac{1}{81}\right)$

(3) $\left(3, \frac{1}{81}\right)$ (4) (3, 81)

11. माना सदिश x_1, x_2 तथा x_3, रैखिक समीकरण निकाय $Ax = b$ के हल हैं, जबकि दांई ओर का सदिश b, क्रमशः b_1, b_2 तथा b_3 के बराबर है। यदि

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ तथा $b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, हैं, तो A के सारणिक का मान है:-

(1) $\frac{1}{2}$ (2) 4

(3) $\frac{3}{2}$ (4) 2

12. माना $\theta = \frac{\pi}{5}$ तथा $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$। है यदि $B = A + A^4$, तो det (B) :

(1) 1 के बराबर है। (2) अंतराल (1, 2) में है।

(3) 0 के बराबर (4) अंतराल (2, 3) में है।

SOLUTION

1. NTA Ans. (4)

Sol. $b_{ij} = (3)^{(i+j-2)} a_{ij}$

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & 3a_{12} & 3^2 a_{13} \\ 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ 3^2 a_{31} & 3^2 a_{32} & 3^2 a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |B| = 3 \times 3^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ 3^2 a_{31} & 3^2 a_{32} & 3^2 a_{33} \end{vmatrix}$$

$= 3^6|A|$

$\Rightarrow |A| = \dfrac{81}{27 \times 27} = \dfrac{1}{9}$

2. NTA Ans. (1)

Sol. $x^2 + x + 1 = 0$

$\alpha = \omega$

$\alpha^2 = \omega^2$

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow A^4 = A^2 . A^2 = I_3$

$A^{31} = A^{28}. A^3 = A^3.$

3. NTA Ans. (2)

Sol. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$; $|A| = 8 - 18 = -10$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}}{-10}$$

$$10A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} = A - 6I$$

(2) Option

4. NTA Ans. (672.00)

Sol. trace $(AA^T) = \Sigma a_{ij}^2 = 3$

Hence, number of such matrices

$= {}^9C_3 \times 2^3 = 672.00$

5. NTA Ans. (3)

Sol. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $|A| = 6$

$$\frac{|\text{adj}B|}{|c|} = \frac{|\text{adj}(\text{adj}A)|}{|9A|} = \frac{|A|^4}{3^3\,|A|} = \frac{|A|^3}{3^3}$$

$= \dfrac{(6)^3}{(3)^3} = 8$

6. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $|A| \neq 0$

For (P) : $A \neq I_2$

So, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ or $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ or $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ or $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

or $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$|A|$ can be -1 or 1

So (P) is false.

For (Q); $|A| = 1$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ or $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ or $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ tr(A) = 2

$\Rightarrow$ Q is true

7. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $A^TA = I$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1$

and $ab + bc + ca = 0$

Now, $(a + b + c)^2 = 1$

$\Rightarrow a + b + c = \pm 1$

So, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$= \pm 1 (1 - 0) = \pm 1$

$\Rightarrow 3abc = 2 \pm 1 = 3, 1$

$\Rightarrow abc = 1, \dfrac{1}{3}$

8. Official Ans. by NTA (2)

Sol. Given $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & 9 & 1 \end{bmatrix}$, Here |P| = 0 & also

given PX = 0

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & 9 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x+2y+z=0 \\ -2x+3y-4z=0 \\ x+9y-z=0 \end{matrix}\right\} \because D = 0, \text{so system have}$$

infinite many solutions,

By solving these equation

we get $x = \frac{-11\lambda}{2}; y = \lambda; z = \frac{7\lambda}{2}$

Also given, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$\Rightarrow \left(\frac{-11\lambda}{2}\right)^2 + (\lambda)^2 + \left(\frac{7\lambda}{2}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{121}{4}+1+\frac{49}{4}}}$$

so, there are 2 values of λ.

$\therefore$ so, there are 2 solution set of (x,y,z).

9. Official Ans. by NTA (10)

Sol. $A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2+1 & x \\ x & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} x^2+1 & x \\ x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^2+1 & x \\ x & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (x^2+1)^2+x^2 & x(x^2+1)+x \\ x(x^2+1)+x & x^2+1 \end{bmatrix}$$

$a_{11} = (x^2 + 1)^2 + x^2 = 109$

$\Rightarrow x = \pm 3$

$a_{22} = x^2 + 1 = 10$

10. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $C = \text{adj } A = \begin{vmatrix} +2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

$|C| = |\text{adj } A| = +2(0 + 4) + 1.(1 - 2) + 1.(2-0) = +8 - 1 + 2$

$|\text{adj } A| = |A|^2 = 9 = 9$

$\lambda = |A| = \pm 3$

$|\lambda| = 3$

$B = \text{adj } C$

$|B| = |\text{adj } C| = |C|^2 = 81$

$|(B^{-1})^T| = |B|^{-1} = \frac{1}{81}$

$(|\lambda|, \mu) = \left(3, \frac{1}{81}\right)$

11. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $Ax_1 = b_1$

$Ax_2 = b_2$

$Ax_3 = b_3$

$$\Rightarrow |A|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = \frac{4}{2} = 2$$

12. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

$B = A + A^4$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos 4\theta & \sin 4\theta \\ -\sin 4\theta & \cos 4\theta \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} (\cos\theta + \cos 4\theta) & (\sin\theta + \sin 4\theta) \\ -(\sin\theta + \sin 4\theta) & (\cos\theta + \cos 4\theta) \end{bmatrix}$$

$|B| = (\cos\theta + \cos 4\theta)^2 + (\sin\theta + \sin 4\theta)^2$

$|B| = 2 + 2\cos 3\theta$, when $\theta = \frac{\pi}{5}$

$$|B| = 2 + 2\cos\frac{3\pi}{5} = 2(1 - \sin 18)$$

$$|B| = 2\left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) = 2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$$