MONOTONICITY

1. फलन $f(x) = x^3 - 4x^2 + 8x + 11$, $x \in [0, 1]$ के लिए लग्रांज मध्यमान प्रमेय में c का मान है :

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{7}-2}{3}$

(3) $\frac{4-\sqrt{5}}{3}$ (4) $\frac{4-\sqrt{7}}{3}$

2. फलन $f : [-7, 0] \to R$, $[-7, 0]$ पर संतत है तथा $(-7, 0)$ पर अवकलनीय है। यदि $f(-7) = -3$ और सभी $x \in (-7, 0)$ के लिए, $f'(x) \le 2$ है, तो ऐसे सभी फलनों f के लिए, $f(-1) + f(0)$ जिस अंतराल में है, वह है :

(1) $[-6, 20]$ (2) $(-\infty, 20]$

(3) $(-\infty, 11]$ (4) $[-3, 11]$

3. माना सभी फलनों $f : [0,1] \to R$, जो कि $[0,1]$ पर संतत हैं तथा $(0,1)$ पर अवकलनीय हैं, का समुच्चय S हैं। तो S में प्रत्येक f के लिए f पर निर्श्च एक $c \in (0,1)$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि :

(1) $|f(c) - f(1)| < (1 - c)|f'(c)|$

(2) $|f(c) - f(1)| < |f'(c)|$

(3) $|f(c) + f(1)| < (1 + c)|f'(c)|$

(4) $\frac{f(1)-f(c)}{1-c} = f'(c)$

4. यदि c एक बिंदु है जिस पर, अंतराल $[3,4]$ में, फलन $f(x) = \log_e\left(\frac{x^2+\alpha}{7x}\right)$ पर रोले प्रमेय लागू होता है, जहाँ $\alpha \in R$ है, तो $f''(c)$ बराबर है :

(1) $\frac{\sqrt{3}}{7}$

(2) $\frac{1}{12}$

(3) $-\frac{1}{24}$

(4) $-\frac{1}{12}$

5. माना $f(x) = x\cos^{-1}(-\sin|x|)$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ है, तो निम्न में से कौन सा सत्य है?

(1) f', $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ में वर्धमान है तथा $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में ह्रासमान है।

(2) f, $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है।

(3) $f'(0) = -\frac{\pi}{2}$

(4) f', $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ में ह्रासमान है तथा $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में वर्धमान हैं।

6. माना f कोई फलन है जोकि $[a, b]$ में संतत तथा (a, b) में दो बार अवकलनीय है। यदि सभी $x \in (a, b)$ के लिए $f'(x) > 0$ तथा $f''(x) < 0$ हैं, तो किसी भी $c \in (a, b)$, के लिए $\frac{f(c)-f(a)}{f(b)-f(c)}$ निम्न में से किससे बड़ा है?

(1) $\frac{b+a}{b-a}$ (2) $\frac{b-c}{c-a}$

(3) $\frac{c-a}{b-c}$ (4) 1

7. यदि $f : (-1, \infty) \to R$, $f(0) = 1$ तथा $f(x) = \frac{1}{x}\log_e(1+x), x \ne 0$ द्वारा परिभाषित है, तो फलन f :

(1) $(-1, \infty)$ में ह्रासमान है।

(2) $(-1, 0)$ में ह्रासमान है तथा $(0, \infty)$ में वर्धमान है।

(3) $(-1, \infty)$ में वर्धमान है।

(4) $(-1, 0)$ में वर्धमान है तथा $(0, \infty)$ में ह्रासमान है।

8. फलन $f(x) = (3x - 7)x^{2/3}$, $x \in R$, के वर्धमान होने के लिए, सभी x निम्नलिखित में से किस में स्थित है?

(1) $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{7}, \infty\right)$

(2) $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{14}{15}, \infty\right)$

(3) $\left(-\infty, \frac{14}{15}\right)$

(4) $\left(-\infty, -\frac{14}{15}\right) \cup (0, \infty)$

9. माना अन्तराल (1, 6) में f दो बार अवकलनीय फलन है। यदि $f(2) = 8$, $f'(2) = 5$, $f'(x) \geq 1$ तथा $f''(x) \geq 4$, $\forall x \in (1, 6)$ हो, तो

(1) $f(5) \leq 10$ (2) $f'(5) + f''(5) \leq 20$

(3) $f(5) + f'(5) \geq 28$ (4) $f(5) + f'(5) \leq 26$

10. प्रत्येक दो बार अवकलनीय फलन $f : R \rightarrow R$ जिसके लिए $f(0) = f(1) = f'(0) = 0$ है, तो :

(1) किसी $x \in (0, 1)$ पर $f''(x) = 0$

(2) $f''(0) = 0$

(3) प्रत्येक बिन्दु $x \in (0, 1)$ पर $f''(x) \neq 0$

(4) प्रत्येक बिन्दु $x \in (0, 1)$ पर $f''(x) = 0$

11. यदि वक्र $y = f(x) = x\log_e x$, $(x > 0)$ के एक बिन्दु $(c, f(c))$ पर स्पर्श रेखा बिन्दुओं (1, 0) तथा (e, e), को मिलाने वाले रेखाखण्ड के समान्तर है, तो c बराबर है :

(1) $\frac{1}{e-1}$ (2) $e^{\left(\frac{1}{1-e}\right)}$

(3) $e^{\left(\frac{1}{e-1}\right)}$ (4) $\frac{e-1}{e}$

SOLUTION

1. NTA Ans. (4)

Sol. f(0) = 11

f(1) = 16

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=3c^2-8c+8$$

$\Rightarrow$ $3c^2 - 8c + 8 = 5$

$\Rightarrow$ $3c^2 - 8c + 3 = 0$

$$c \in [0, 1] \ \Rightarrow c = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$$

2. NTA Ans. (2)

Sol. Using LMVT in [–7, –1]

$$\frac{f(-1)-f(-7)}{-1-(-7)} \le 2$$

$f(-1) - f(-7) \le 12$

$\Rightarrow f(-1) \le 9$ ....(1)

Using LMVT in [–7, 0]

$$\frac{f(0)-f(-7)}{0-(-7)} \le 2$$

$f(0) - f(-7) \le 14$

$f(0) \le 11$ ....(2)

from (1) and (2)

$f(0) + f(-1) \le 20$

3. NTA Ans. (2)

ALLEN Ans. (BONUS)

Note: None of the options is correct for all *f* in S. Thus, it should be bonus, but NTA did not accept it.

Sol. Option (1), (2), (3) are incorrect for $f(x)$ = constant and option (4) is incorrect

$$\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=f'(a) \text{ where } c<a<1 \text{ (use LMVT)}$$

Also for $f(x) = x^2$ option (4) is incorrect.

4. NTA Ans. (2)

Sol. $$\frac{9+\alpha}{21}=\frac{16+\alpha}{28} \Rightarrow \alpha=12$$

Also, $$f'(x)=\frac{7x}{x^2+12}\times\frac{x^2-12}{7x^2}=\frac{x^2-12}{x\left(x^2+12\right)}$$

Hence, $c=2\sqrt{3}$

Now, $$f''(c)=\frac{1}{12}$$

5. NTA Ans. (1)

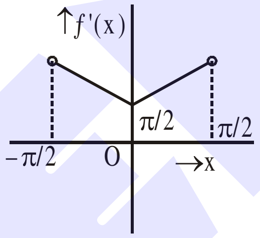
Sol. $f(x)$ is an odd function.

Now, if $x \ge 0$, then $f(x) = x\cos^{-1}(-\sin x)$

$$= x\left(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}(-\sin x)\right)=x\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

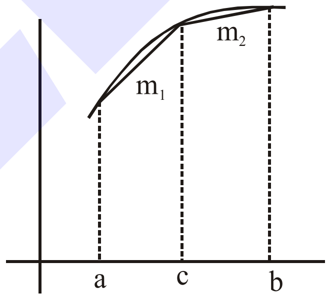
Hence, $$f(x)=\begin{cases} x\left(\frac{\pi}{2}+x\right) & ; \quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \\ x\left(\frac{\pi}{2}-x\right) & ; \quad x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right) \end{cases}$$

so, $$f'(x)=\begin{cases} \frac{\pi}{2}+2x & ; \quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{\pi}{2}-2x & ; \quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right) \end{cases}$$



6. NTA Ans. (3)

Sol.



it is clear from graph that $m_1 > m_2$

$$\Rightarrow \frac{f(c)-f(a)}{c-a} > \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

$$\Rightarrow \frac{f(c)-f(a)}{f(b)-f(c)} > \frac{c-a}{b-c}$$

7. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $$f'(x)=\frac{\frac{x}{1+x}-\ell n(1+x)}{x^2}$$

$$=\frac{x-(1+x)\,\ell n(1+x)}{x^2(1+x)}$$

Suppose $h(x) = x - (1 + x)\ \ell n(1+x)$

$\Rightarrow$ $h'(x) = 1 - \ell n(1+x) - 1 = -\ell n(1+x)$

$h'(x) > 0, \forall\ x \in (-1, 0)$

$h'(x) < 0, \forall x \in (0, \infty)$

$h(0) = 0 \Rightarrow h'(x) < 0 \ \forall x \in (-1, \infty)$

$\Rightarrow f'(x) < 0 \ \forall x \in (-1, \infty)$

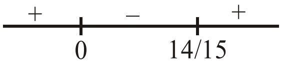
$\Rightarrow$ f(x) is a decreasing function for all $x \in (-1, \infty)$

8. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $f(x) = (3x - 7)x^{2/3}$

$\Rightarrow f(x) = 3x^{5/3} - 7x^{2/3}$

$$\Rightarrow f'(x) = 5x^{2/3} - \frac{14}{3x^{1/3}} = \frac{15x - 14}{3x^{1/3}} > 0$$



$$\therefore f'(x) > 0 \ \forall \ x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{14}{15}, \infty\right)$$

9. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $f(2) = 8, f'(2) = 5, f'(x) \geq 1, f''(x) \geq 4, \forall x \in (1,6)$

$$f''(x) = \frac{f'(5) - f'(2)}{5 - 2} \geq 4 \Rightarrow f'(5) \geq 17 \quad ...(1)$$

$$f'(x) = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} \geq 1 \Rightarrow f(5) \geq 11 \quad ...(2)$$

$$\overline{f'(5) + f(5) \geq 28}$$

10. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $f(0) = f(1) = f'(0) = 0$

Apply Rolles theorem on $y = f(x)$ in $x \in [0, 1]$

$f(0) = f(1) = 0$

$\Rightarrow f'(\alpha) = 0$ where $\alpha \in (0, 1)$

Now apply Rolles theorem on $y = f'(x)$

in $x \in [0, \alpha]$

$f'(0) = f'(\alpha) = 0$ and $f'(x)$ is continuous and differentiable

$\Rightarrow f''(\beta) = 0$ for some , $\beta \in (0, \alpha) \in (0, 1)$

$\Rightarrow f''(x) = 0$ for some $x \in (0, 1)$

11. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $f(x) = x\log_e x$

$$f'(x)\big|_{(c, f(c))} = \frac{e - 0}{e - 1}$$

$f'(x) = 1 + \log_e x$

$$f'(x)\big|_{(c, f(c))} = 1 + \log_e c = \frac{e}{e - 1}$$

$$\log_e c = \frac{e - (e - 1)}{e - 1} = \frac{1}{e - 1} \Rightarrow c = e^{\frac{1}{e-1}}$$