QUADRATIC EQUATION

1. माना α तथा β समीकरण $x^2 - x - 1 = 0$ के मूल हैं। यदि $p_k = (\alpha)^k + (\beta)^k$, $k \geq 1$, तो निम्न में से कौन सा एक कथन सत्य नहीं है?

(1) $(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5) = 26$

(2) $p_5 = 11$

(3) $p_3 = p_5 - p_4$

(4) $p_5 = p_2 \cdot p_3$

2. माना समीकरण $3^x(3^x - 1) + 2 = |3^x - 1| + |3^x - 2|$ के सभी वास्तविक मूलों का समुच्चय S है। तो S :

(1) एक रिक्त समुच्चय हैं।

(2) में कम से कम चार अवयव हैं।

(3) में मात्र दो अवयव हैं।

(4) एक ही अवयव वाला समुच्चय हैं।

3. 'a' का वह न्यूनतम धनात्मक मान, जिसके लिए समीकरण $2x^2 + (a - 10)x + \frac{33}{2} = 2a$ के वास्तविक मूल हैं, है ________ ।

4. माना $a, b \in R$, $a \neq 0$ इस प्रकार हैं कि समीकरण $ax^2 - 2bx + 5 = 0$ का α पुनरावृत्त मूल है, जो समीकरण $x^2 - 2bx - 10 = 0$ का भी एक मूल है। यदि β इस समीकरण का दूसरा मूल है, तो $\alpha^2 + \beta^2$ बराबर है :

(1) 26 (2) 25

(3) 28 (4) 24

5. यदि $A = \{x \in \mathbf{R} : |x| < 2\}$ तथा $B = \{x \in \mathbf{R} : |x - 2| \geq 3\}$, तो :

(1) $A \cup B = \mathbf{R} - (2, 5)$

(2) $A \cap B = (-2, -1)$

(3) $B - A = \mathbf{R} - (-2, 5)$

(4) $A - B = [-1, 2)$

6. समीकरण $e^{4x} + e^{3x} - 4e^{2x} + e^x + 1 = 0$ के वास्तविक मूलों की संख्या है :

(1) 4 (2) 2

(3) 3 (4) 1

7. माना α तथा β समीकरण $5x^2 + 6x - 2 = 0$ के मूल हैं। यदि $S_n = \alpha^n + \beta^n$, $n = 1,2,3....$ है, तो :

(1) $5S_6 + 6S_5 = 2S_4$

(2) $5S_6 + 6S_5 + 2S_4 = 0$

(3) $6S_6 + 5S_5 + 2S_4 = 0$

(4) $6S_6 + 5S_5 = 2S_4$

8. माना f(x) एक द्विघात बहुपद है जिसके लिए $f(-1) + f(2) = 0$ है। यदि $f(x) = 0$ का एक मूल 3 है, तो दूसरा मूल निम्न में से किस अन्तराल में स्थित है?

(1) $(-3, -1)$ (2) $(1, 3)$

(3) $(-1, 0)$ (4) $(0, 1)$

9. यदि α तथा β, समीकरण $x^2 + px + 2 = 0$ के मूल हैं तथा $\frac{1}{\alpha}$ तथा $\frac{1}{\beta}$, समीकरण $2x^2 + 2qx + 1 = 0$ के मूल हैं, तो $\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$ बराबर है:

(1) $\frac{9}{4}(9 + p^2)$ (2) $\frac{9}{4}(9 - q^2)$

(3) $\frac{9}{4}(9 - p^2)$ (4) $\frac{9}{4}(9 + q^2)$

10. λ की उन सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय, जिनके लिए द्विघात समीकरणों, $(\lambda^2 + 1)x^2 - 4\lambda x + 2 = 0$, का अंतराल (0, 1) में सदैव मात्र एक ही मूल है, है:

(1) $(-3, -1)$ (2) $(1, 3]$

(3) $(0, 2)$ (4) $(2, 4]$

11. माना $x^2 - 3x + p = 0$ के मूल α तथा β एवं $x^2 - 6x + q = 0$ के मूल γ तथा δ है। यदि $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ गुणोत्तर श्रेढ़ी के रूप में है। तब अनुपात $(2q + p) : (2q - p)$ होगा

(1) 3 : 1 (2) 33 : 31

(3) 9 : 7 (4) 5 : 3

12. माना $\lambda \neq 0$, R में है। यदि α तथा β समीकरण $x^2 - x + 2\lambda = 0$ के मूल हैं और α तथा γ, समीकरण $3x^2 - 10x + 27\lambda = 0$ के मूल हैं, तो $\frac{\beta\gamma}{\lambda}$ बराबर है :

(1) 36 (2) 27

(3) 9 (4) 18

13. समीकरण $9x^2 - 18|x| + 5 = 0$ के मूलों का गुणनफल है :

(1) $\frac{25}{9}$ (2) $\frac{25}{81}$

(3) $\frac{5}{27}$ (4) $\frac{5}{9}$

14. यदि α तथा β समीकरण, $7x^2 - 3x - 2 = 0$ के मूल हैं, तो, $\frac{\alpha}{1-\alpha^2} + \frac{\beta}{1-\beta^2}$ का मान है :

(1) $\frac{27}{16}$ (2) $\frac{1}{24}$

(3) $\frac{27}{32}$ (4) $\frac{3}{8}$

15. यदि α तथा β, समीकरण $x^2 - 64x + 256 = 0$ के दो मूल हैं, तो $\left(\frac{\alpha^3}{\beta^5}\right)^{\frac{1}{8}} + \left(\frac{\beta^3}{\alpha^5}\right)^{\frac{1}{8}}$ का मान है :

(1) 1 (2) 3

(3) 4 (4) 2

16. यदि α तथा β समीकरण $2x(2x + 1) = 1$ के मूल हैं, तो β बराबर है :

(1) $2\alpha^2$ (2) $2\alpha(\alpha + 1)$

(3) $-2\alpha(\alpha + 1)$ (4) $2\alpha(\alpha - 1)$

SOLUTION

1. NTA Ans (4)

Sol. $\alpha + \beta = 1,\ \alpha\beta = -1$

$P_k = \alpha^k + \beta^k$

$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$

$\Rightarrow \alpha^k - \alpha^{k-1} - \alpha^{k-2} = 0$

& $\beta^k - \beta^{k-1} - \beta^{k-2} = 0$

$\Rightarrow P_k = P_{k-1} + P_{k-2}$

$P_1 = \alpha + \beta = 1$

$P_2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1 + 2 = 3$

$P_3 = 4$

$P_4 = 7$

$P_5 = 11$

2. NTA Ans.(4)

Sol. Let $3^x = t$; $t > 0$

$t(t - 1) + 2 = |t - 1| + |t - 2|$

$t^2 - t + 2 = |t - 1| + |t - 2|$

Case-I : $t < 1$

$t^2 - t + 2 = 1 - t + 2 - t$

$t^2 + 2 = 3 - t$

$t^2 + t - 1 = 0$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$t = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$ is only acceptable

Case-II : $1 \le t < 2$

$t^2 - t + 2 = t - 1 + 2 - t$

$t^2 - t + 1 = 0$

$D < 0$ no real solution

Case-III : $t \ge 2$

$t^2 - t + 2 = t - 1 + t - 2$

$t^2 - 3t\ \ 5 = 0 \Rightarrow D < 0$ no real solution

(4) Option

3. NTA Ans. (8.00)

Sol. $D \ge 0 \Rightarrow (a - 10)^2 - 4 \times 2 \times \left(\dfrac{33}{2} - 2a\right) \ge 0$

$\Rightarrow a^2 - 4a - 32 \ge 0$

$\Rightarrow a \in (-\infty, 4] \cup [8, \infty)$

4. NTA Ans. (2)

Sol. $ax^2 - 2bx + 5 = 0 < \begin{matrix}\alpha \\ \alpha\end{matrix}$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{b}{a};\ \alpha^2 = \dfrac{5}{a} \Rightarrow b^2 = 5a$

$x^2 - 2bx - 10 = 0 < \begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix} \Rightarrow \alpha^2 - 2b\alpha - 10 = 0$

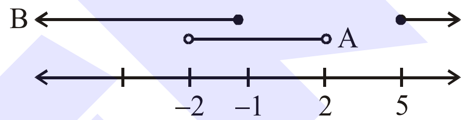
$\Rightarrow a = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \alpha^2 = 20;\ \alpha\beta = -10 \Rightarrow \beta^2 = 5$

$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 25$

5. NTA Ans. (3)

Sol. $A : x \in (-2, 2)$; $B : x \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty)$

$\Rightarrow B - A = R - (-2, 5)$



6. NTA Ans. (4)

Sol. $e^{4x} + e^{3x} - 4e^x + e^x + 1 = 0$

Divide by e^{2x}

$$\Rightarrow e^{2x} + e^x - 4 + \frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^{2x}} = 0$$

$$\Rightarrow \left(e^{2x} + \frac{1}{e^{2x}}\right) + \left(e^x + \frac{1}{e^x}\right) - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)^2 - 2 + \left(e^x + \frac{1}{e^x}\right) - 4 = 0$$

Let $e^x + \dfrac{1}{e^x} = t \Rightarrow (e^x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 0.$

$\therefore$ Number of real roots = 1

7. Official Ans. by NTA (1)

Sol. α and β are roots of $5x^2 + 6x - 2 = 0$

$\Rightarrow 5\alpha^2 + 6\alpha - 2 = 0$

$\Rightarrow 5\alpha^{n+2} + 6\alpha^{n+1} - 2\alpha^n = 0$ …(1)

(By multiplying α^n)

Similarly $5\beta^{n+2} + 6\beta^{n+1} - 2\beta^n = 0$ …(2)

By adding (1) & (2)

$5S_{n+2} + 6S_{n+1} - 2S_n = 0$

For n = 4

$\boxed{5S_6 + 6S_5 = 2S_4}$

8. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $f(x) = a(x-3)(x-\alpha)$

$f(2) = a(\alpha - 2)$

$f(-1) = 4a(1+\alpha)$

$f(-1) + f(2) = 0 \Rightarrow a(\alpha - 2 + 4 + 4\alpha) = 0$

$a \neq 0 \Rightarrow 5\alpha = -2$

$\alpha = -\frac{2}{5} = -0.4$

$\alpha \in (-1, 0)$

9. Official Ans. by NTA (3)

Sol. α, β are roots of $x^2 + px + 2 = 0$

$\Rightarrow \alpha^2 + p\alpha + 2 = 0$ & $\beta^2 + p\beta + 2 = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ are roots of $2x^2 + px + 1 = 0$

But $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ are roots of $2x^2 + 2qx + 1 = 0$

$\Rightarrow p = 2q$

Also $\alpha + \beta = -p \quad \alpha\beta = 2$

$$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$= \left(\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}\right)\left(\frac{\beta^2 - 1}{\beta}\right)\left(\frac{\alpha\beta + 1}{\beta}\right)\left(\frac{\alpha\beta + 1}{\alpha}\right)$$

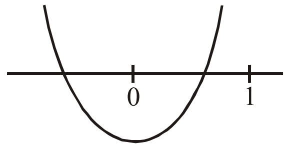
$$= \frac{(-p\alpha - 3)(-p\beta - 3)(\alpha\beta + 1)^2}{(\alpha\beta)^2}$$

$$= \frac{9}{4}(p\alpha\beta + 3p(\alpha + \beta) + 9)$$

$$= \frac{9}{4}(9 - p^2) = \frac{9}{4}(9 - 4q^2)$$

10. Official Ans. by NTA (2)

Sol. If exactly one root in (0, 1) then



$\Rightarrow f(0).f(1) < 0$

$\Rightarrow 2(\lambda^2 - 4\lambda + 3) < 0$

$\Rightarrow 1 < \lambda < 3$

Now for $\lambda = 1$, $2x^2 - 4x + 2 = 0$

$(x-1)^2 = 0$, $x = 1, 1$

So both roots doesn't lie between (0, 1)

$\therefore \lambda \neq 1$

Again for $\lambda = 3$

$10x^2 - 12x + 2 = 0$

$\Rightarrow x = 1, \frac{1}{5}$

so if one root is 1 then second root lie between (0, 1)

so $\lambda = 3$ is correct.

$\therefore \lambda \in (1, 3]$.

11. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $x^2 - 3x + p = 0 \left\langle \begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix}\right.$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in G.P.

$\alpha + \alpha r = 3 \quad ....(1)$

$x^2 - 6x + q = 0 \left\langle \begin{matrix}\gamma \\ \delta\end{matrix}\right.$

$\alpha r^2 + \alpha r^3 = 6 \quad ...(2)$

$(2) \div (1)$

$r^2 = 2$

So, $\frac{2q+p}{2q-p} = \frac{2r^5 + r}{2r^5 - r} = \frac{2r^4 + 1}{2r^4 - 1} = \frac{9}{7}$

12. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = 2\lambda$

$\alpha + \beta = \frac{10}{3}, \quad \alpha\gamma = \frac{27\lambda}{3} = 9\lambda$

$\gamma - \beta = \frac{7}{3},$

$$\frac{\gamma}{\beta}=\frac{9}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{9}{2}\beta=\frac{9}{2}\times\frac{2}{3} \Rightarrow \gamma = 3$$

$$\frac{9}{2}\beta-\beta=\frac{7}{3}$$

$$\frac{9}{2}\beta=\frac{7}{3}\Rightarrow\beta=\frac{2}{3}$$

$$\alpha = 1 - \frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$2\lambda = \frac{2}{9}\Rightarrow\lambda=\frac{1}{9}$$

$$\frac{\beta\gamma}{\lambda}=\frac{\frac{2}{3}\times 3}{\frac{1}{9}}=18$$

13. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $9x^2 - 18|x| + 5 = 0$

$9|x|^2 - 15|x| - 3|x| + 5 = 0$ ($\because$ $x^2 = |x|^2$)

$3|x|(3|x| - 5) - (3|x| - 5) = 0$

$$|x| = \frac{1}{3}, \frac{5}{3}$$

$$x = \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}$$

Product of roots $= \frac{25}{81}$

14. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $7x^2 - 3x - 2 = 0$

$$\alpha + \beta = \frac{3}{7} \quad \alpha\beta = \frac{-2}{7}$$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha^2}+\frac{\beta}{1-\beta^2} = \frac{\alpha+\beta-\alpha\beta(\alpha+\beta)}{1-\alpha^2-\beta^2+\alpha^2\beta^2}$$

$$= \frac{\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\left(\frac{3}{7}\right)}{1-(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta+\alpha^2\beta^2} = \frac{27}{16}$$

15. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $x^2 - 64x + 256 = 0$

$\alpha + \beta = 64, \alpha\beta = 256$

$$\left(\frac{\alpha^3}{\beta^5}\right)^{1/8}+\left(\frac{\beta^3}{\alpha^5}\right)^{1/8}=\frac{\alpha^{3/8}}{\beta^{5/8}}+\frac{\beta^{3/8}}{\alpha^{5/8}}$$

$$=\frac{\alpha+\beta}{(\alpha\beta)^{5/8}}=\frac{64}{(256)^{5/8}}=2$$

16. Official Ans. by NTA (3)

Sol. α and β are the roots of the equation $4x^2 + 2x - 1 = 0$

$$4\alpha^2 + 2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}=2\alpha^2+\alpha \quad ...(1)$$

$$\beta=\frac{-1}{2}-\alpha$$

using equation (1)

$\beta = -(2\alpha^2 + \alpha) - \alpha$

$\beta = -2\alpha^2 - 2\alpha$

$\beta = -2\alpha(\alpha + 1)$